# Algebra Booleana

Corso di Architettura degli elaboratori e laboratorio

Modulo Laboratorio

**Gabriella Verga**

# Introduzione

L’Algebra Booleana è un sistema algebrico in cui ogni variabile può assumere solo 2 valori (0 e 1)

Principali operazioni definite su variabili binarie (FUNZIONI LOGICHE FONDAMENTALI):

- Somma logica o **OR**
- Prodotto logico o **AND**
- Complementazione, Negazione, Inversione o **NOT**
- Differenza simmetrica, OR esclusivo o **XOR**

Ciascuna operazione prende in ingresso una o più variabili binarie e rende in uscita una variabile binaria

# Somma logica o OR

- La somma logica o OR è una funzione che vale 1 solo se almeno uno dei suoi ingressi binari vale 1.

- Si denota tramite gli operatori a due argomenti "**+**" o "V"
- La forma algebrica della somma è:
  - $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 = x_1 \vee x_2$
- Dove $x_1,x_2$ si dicono variabili d'ingresso ed f il valore di uscita della funzione.

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1,x_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

# Proprietà base della Somma logica

- **Proprietà commutativa**: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
- **Proprietà associativa:** $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
- Pertanto:
  - $\boldsymbol{f = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1 \Leftrightarrow \exists\, x_i \mid x_i = 1 \text{ con } 1 \leq i \leq n}$

- **Identità:**
- $1 + x = 1$
- $0 + x = x$

# Prodotto logico o AND

- Il prodotto logico o AND è una funzione che vale 1 solo se tutti i suoi ingressi binari valgono 1
- Si denota tramite gli operatori a due argomenti "·" o "**∧**"
- La forma algebrica della somma è:
  - $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2 = x_1 \wedge x_2$

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1,x_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# Proprietà base del Prodotto logico

- **Proprietà commutativa**: $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$
- **Proprietà associativa:** $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$
- Pertanto:
  - $\boldsymbol{f = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \Leftrightarrow \forall x_i \mid x_i = 1 \text{ con } 1 \leq i \leq n}$

- **Identità:**
- $1 \cdot x = x$
- $0 \cdot x = 0$

# Operatori di Negazione o NOT

- Il complemento logico o inversione o NOT è una funzione che inverte il valore dell'unica variabile in ingresso

- Si denota tramite gli operatori a due argomenti "¯" o "¬"
- La forma algebrica della inversione è:
  - $f(x_1) = \neg x_1$

- Proprietà di involuzione (doppia negazione)

| $x_1$ | $f(x_1)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

# Differenza simmetrica o XOR

- La differenza simmetrica o XOR è la funzione che vale 1 se e solo se gli 1 nei suoi ingressi sono in numero dispari.

- Si denota tramite gli operatori a due argomenti "⊕".
- La forma algebrica della differenza simmetrica è:
  - $f(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2$

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1,x_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# Proprietà

- **Proprietà commutativa**: $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
- **Proprietà associativa:** $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$
- **Identità:**
- $1 \oplus x = \overline{x}$
- $0 \oplus x = x$
- $f = x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}\, x_2 + x_1\, \overline{x_2}$

| $x_1$ | $x_2$ | $\overline{x_1}\, x_2$ | $x_1\, \overline{x_2}$ | f |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

# Precedenza tra operatori

| Operatore | Precedenza |
|---|---|
| Negazione – NOT | 1 |
| Prodotto – AND | 2 |
| Somma – OR | 3 |
| OR esclusivo – XOR | 4 |

Per forzare la precedenza di un operatore si possono usare le parentesi.

$(x_1x_2) + (x_1\overline{x_2}) + (\overline{x_1}x_2)$

$x_1(x_2 + x_1)(\overline{x_2} + \overline{x_1})\ x_2$

$x_1x_2 + x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2$

$x_1x_2 + x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2$

# Altre proprietà: Regole dell’algebra di Boole

| REGOLA | FORMA DUALE |
|---|---|
| **Proprietà Distributiva** | |
| $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$ | $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ |
| **Proprietà Di idempotenza** | |
| $x + x = x$ | $x \cdot x = x$ |
| **Proprietà di complemento** | |
| $x + \neg x = 1$ | $x \cdot \neg x = 0$ |
| **Proprietà dello 1 e dello 0** | |
| $1 + x = 1$ | $0 \cdot x = 0$ |

# Teorema di De Morgan

$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

| $x$ | $y$ | $\overline{x}$ | $\overline{y}$ | $\overline{x} \cdot \overline{y}$ | $x + y$ | $\overline{x + y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

| $x$ | $y$ | $\overline{x}$ | $\overline{y}$ | $\overline{x} + \overline{y}$ | $x \cdot y$ | $\overline{x \cdot y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |